Algebra II
I appello - 31 gennaio 2018
A.A. 2017/2018

1 - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in F\}$. Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (4, 5, h)$, $v_2 = (3, 2, 1)$, $v_3 = (6, 4, 16)$, $v_4 = (6, 5, 4)$, $v_5 = (k, 1, 10)$, ed i sottospazi $W = < v_1 , v_2, v_3 >$ e $V = < v_4 , v_5 >$ di F^4.

(I) In funzione di h, k e della caratteristica di F :

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V ;

- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V ;

- si individui $dim\,(W + V)$ e si precisi quando $W + V = W \oplus V$.

(II) Posto $U = < v_2 , v_4 > = < (3, 2, 1), (6, 5, 4) >$, si descrivano gli elementi di U e :

- si determini, in funzione della caratteristica di F, la dimensione di U ;

- si verifichi quando la posizione $\psi(\ (a, b, c) + U\ ) = 3a - 4b - c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F ed in tal caso si provi che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali; se ne discutano poi eventuali suriettività e iniettività. In caso di applicazione non iniettiva, si individuino elementi distinti del dominio con uguale immagine.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^6 + x^5 + 11x^4 - 17x^2 - 17x - 187 \in B[x] \,.$$

Distinguendo i casi: $B = \mathbf{Q}$, $B = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{Z}_2$, $B = \mathbf{Z}_3$, $B = \mathbf{Z}_5$, $B = \mathbf{Z}_{17}$,

(***i***) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $B[x]$;

(***ii***) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a B , precisandone la cardinalità, il grado $\mid E : B \mid$ e una B-base ;

(***iii***) si individui, per $B \neq \mathbf{Z}_5$, una decomposizione in fattori di primo grado di $f(x)$ in $E[x]$.